**БУ «Сургутский колледж русской культуры**

**им. А. С. Знаменского»**

**ПРАКТИКУМ ДЛЯ СТУДЕНТОВ**

**Математика и информатика.**

**СТЕРЕОМЕТРИЯ**

**Прямые и плоскости в пространстве.**

**2019**

**Составитель: Спица О.В.- преподаватель математики информатики**

**Простейшие фигуры. Параллельность в пространстве.**

***Теоретические сведения.***

**Стереометрия** — это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве.

Слово «стереометрия» происходит от греческих слов «στερεοσ» — объемный, пространственный и «μετρεο» — измерять.

**Простейшие фигуры в пространстве:** точка, прямая, плоскость.

|  |  |
| --- | --- |
| Плоскость**Плоскость.** Представление о плоскости дает гладкая поверхность стола или стены. Плоскость как геометрическую фигуру следует представлять себе простирающейся неограниченно во все стороны.  |  |
| Плоскость и точкиНа рисунках плоскости изображаются в виде параллелограмма или в виде произвольной области и обозначаются греческими буквами α, β, γ и т.д. Точки А и В лежат в плоскости β (плоскость β проходит через эти точки), а точки M, N, P не лежат в этой плоскости. Коротко это записывают так: А ∈ β, B ∈ β, http://tvsh2004.narod.ru/img/10-7.gif |   |

**Аксиомы стереометрии и их следствия**

|  |  |
| --- | --- |
| **Аксиома 1.** Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна. | Аксиома 1 |
|  |  |
| **Аксиома 2**. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости. (Прямая лежит на плоскости или плоскость проходит через прямую). | Аксиома 2 |
|  |  |
| **Аксиома 3.** Если две различные плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей. | Аксиома 3 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Способы задания плоскости**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна. |  | Аксиома 1 |
| Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна. |  | Теорема 1 |
| Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и при том только одна. |  | http://tvsh2004.narod.ru/img/10-10.gif |
| Через две параллельные прямые проходит плоскость и только одна. |  | http://tvsh2004.narod.ru/img/10-18.gif |

 |  |
|  **Взаимное расположение прямых в пространстве**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Пересекающиеся прямые** | **Параллельные прямые** | **Скрещивающиеся прямые** |
| http://tvsh2004.narod.ru/img/10-17.gif | http://tvsh2004.narod.ru/img/10-18.gif | http://tvsh2004.narod.ru/img/10-19.gif |
| Две прямые в пространстве называются **пересекающимися**, если они имеют одну общую точку. | Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. | Две прямые называются **скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости. |
| **a∩b=C** | **a||b** | **a · b** |

 |  |
| **Параллельность прямых**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Теорема о параллельных прямых.** | **Лемма о пересечении плоскости параллельными прямыми.** | **Теорема о трех прямых в пространстве (признак параллельности прямых).** |
| Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна. | Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость | Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны. |
| http://tvsh2004.narod.ru/img/10-11.gif | http://tvsh2004.narod.ru/img/10-12.gif | http://tvsh2004.narod.ru/img/10-13.gif |
| Если М~~₵~~а, то существует b||a, такая что M€b  | Если a||b, a∩α, то b∩α | Если *a*∥*c* и *b*∥*c*, то *a*∥*b* |

 |
|  |

**Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Прямая принадлежит плоскости** | **Прямая параллельна плоскости** | **Прямая пересекает плоскость** |
| http://tvsh2004.narod.ru/img/10-15.gif |  |  |
| Прямая принадлежит плоскости, если имеет с ней бесконечное множество общих точек | Прямая параллельна плоскости, если не имеет с ней общих точек | Прямая пересекает плоскость, если имеет с ней одну общую точку |
| b€α | a||α | a∩α=M |

**Параллельность прямой и плоскости**

|  |  |
| --- | --- |
| **Признак параллельности прямой и плоскости** | **Свойства параллельных прямой и плоскости** |
| Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости | Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.  | Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости. |
| http://tvsh2004.narod.ru/img/10-15.gif | http://tvsh2004.narod.ru/img/10-16.gif | http://tvsh2004.narod.ru/img/10-16.gif |
| Если a~~₵~~α, b€α и a||b, то a||α.  | Если a€β и a||α и β∩α=b, то a||b | Если a||b, a||α, то b||α или b€α. |

**Взаимное расположение плоскостей в пространстве.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Плоскости пересекаются** | **Плоскости параллельны** |
| Расположение плоскостей в пространстве |
| α∩β=а |  α||β |

**Параллельность плоскостей в пространстве.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Признак параллельности плоскостей** | **Свойства параллельных плоскостей** |
| .http://d3dxadmpi0hxcu.cloudfront.net/goods/ymk/geometry/work1/theory/1/23.gif | http://static.interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/69873/64a6d4b0_1a05_0131_8faf_12313d221ea2.png | http://static.interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/69874/65c0f0f0_1a05_0131_8fb0_12313d221ea2.png |
| Если две пересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то такие плоскости параллельны | Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны. | Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны. |

***Задачи для аудиторной и самостоятельной работы студентов.***

**П А Р А Л Л Е Л Ь Н О С Т Ь П Р Я М Ы Х И П Л О С К О С Т Е Й**

**1.** Каким может быть взаимное расположение прямых *а* и *b*, если прямая *а* лежит в плоскости α, а прямая *b* параллельна этой плоскости.

А) Параллельны или пересекаются; б) скрещиваются или пересекаются;

в) параллельны или скрещиваются; г) определить нельзя;

д) совпадают.

**2.** Прямая *а* параллельна плоскости α. Какое из следующих утверждений верно?

А) Прямая *а* параллельна любой прямой, лежащей в плоскости α;

б) прямая *а* не пересекает ни одну прямую, лежащую в плоскости α;

в) прямая *а* скрещивается со всеми прямыми, лежащими в плоскости α;

г) прямая *а* имеет общую точку с плоскостью α;

д) прямая *а* лежит в плоскости α;

**3.** Даны треугольник *АВС* и плоскость α, причем *АВ*║α, *АС*║α, тогда прямая *ВС* и плоскость α:

а) Параллельны; б) пересекаются;

в) прямая лежит в плоскости; г) определить нельзя;

д) другой ответ.

**4.** На рисунке плоскость, параллельная стороне *АВ* треугольника *АВС*, пересекает его стороны в точках *М* и *К*. Найдите сторону *АВ*, если точка *М* – середина *АС* и *МК* = 10.

А) Определить нельзя; б) 10; в) 5; г)  д) 20.

**5.** Выберите верное утверждение.

А) Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая также параллельна данной плоскости;

б) если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то другая прямая также пересекает эту плоскость;

в) если две прямые параллельны третьей прямой, то они пересекаются;

г) если прямая и плоскость не имеют общих точек, то прямая лежит в плоскости;

д) прямая и плоскость называются скрещивающимися, если они не имеют общих точек.

**6.** Через концы отрезка *АВ* не пересекающего плоскость α и точку *С* – середину этого отрезка, проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках *А*1, *В*1, *С*1 соответственно. Найдите длину отрезка *СС*1, если *АА*1 = 12, *ВВ*1 = 6.

А) 6; б) 9; в) ; г) ; д) другой ответ.

**7.** В параллелограмме *ABCD* точки *F* и *Е* принадлежат сторонам *CD* и *АВ*, причем *ВЕ* : *ЕА* = *CF* : *FD*. Через эти точки проведена плоскость α так, что *АD*║α, тогда:

а) *ВС*║α; б) *ВС* ∩ α; в) *ВС* ⊂ α; г) *ВС* скрещивается с α;

д) плоскостьα совпадает с плоскостью параллелограмма.

**8.** Прямая *а* параллельная прямой *b* и плоскости α. Выберите верное утверждение.

А) Прямая *b* параллельна плоскости α;

б) прямая *b* лежит в плоскости α;

в) прямая *b* пересекает плоскость α;

г) прямая *b* лежит в плоскости α или параллельна ей;

д) прямая *b* скрещивается с плоскостью α;

**9.** На рисунке точки *М*, *Н*, *Р* – середины соответственно

сторон *AD*, *DC*, *AB*. *HK*║*ABD*. Найдите периметр четырехугольника *МНКР*, если *АС* = 8, *BD* = 10.

А) 18; б) 36; в) 28; г) 26; д) определить нельзя.

**10.** На сторонах *АВ* и *АС* треугольника *АВС* взяли соответственно точки *D* и *Е* так, что *DE* = 5 см, *BD* : *DA* = 2 : 3, провели плоскость через точки *В* и *С* параллельно к отрезку *DE*. Найдите длину отрезка *ВС*.

А) 7,5 см; б) см; в) 15 см; г) определить нельзя; д) 4,6 см.

**Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве.**

***Теоретические сведения.***

**Перпендикулярность прямых**

|  |
| --- |
| **Определение** |
| Две прямые в пространстве перпендикулярны, если угол между ними 90° (прямые могут быть пересекающимися или скрещивающимися). |
| Перпендикулярность в пространстве рис. 2 |
|  a┴b |

**Перпендикулярность прямой и плоскости**

|  |  |
| --- | --- |
| **Определение** | **Признак** |
| Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна всем прямым в этой плоскости. | Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости. |
| Перпендикулярность в пространстве рис. 4 | Перпендикулярность в пространстве рис. 5 |
| h┴α | Если h┴a, h┴b, a∩b, a€α, b€α, то h┴α |

**Перпендикулярность плоскостей**

|  |  |
| --- | --- |
| **Определение** | **Признак** |
| Плоскости перпендикулярны, если двугранный угол\* между ними равен 90° | Две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда одна из них проходит через перпендикуляр к другой плоскости. |
| Плоскости перпендикулярны, если двугранный угол между ними равен 90° | Плоскости перпендикулярны, если двугранный угол между ними равен 90° |
| $β$┴α  | Если b┴α, b€β, то$ β$┴α. |

\*



**Теорема о трех перпендикулярах**

Эта теорема – одна из самых важных в стереометрии.



a – наклонная

a' – проекция наклонной

|  |
| --- |
| Если прямая b перпендикулярна проекции, то она перпендикулярна и наклонной. Если прямая b перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции. |

***Задачи для аудиторной и самостоятельной работы студентов.***

**ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ**

**1.** Укажите фигуру, которой не может быть параллельная проекция параллелограмма.

 А) ромбом; Б) квадратом; В) прямоугольником; Г) трапецией.

 **2.** Из точки А к плоскости проведены наклонная и перпендикуляр, длина которого равна 20см. Угол между наклонной и перпендикуляром 600. Найдите длину наклонной.

А)20$\sqrt{2}см$; Б)40см; В)10$\sqrt{3 }см$; Г)$\sqrt{20}см$.

**3.** СDЕК – квадрат со стороной, равной 2 см. ВD ┴ (СDЕ). Найдите расстояние от точки В до плоскости СDЕ, если ВК = √ 72 см.

а) 4 см; б) 8 см; в) 62 √ 2 см; г) 4 √ 3 см.

**4.** В треугольнике МКС СМ ┴ КМ, точка Е не принадлежит плоскости треугольника МКС и ЕМ ┴ МК. Какие высказывания верны?

1) ЕМ ┴ (МКС); 2) КМ ┴ (МЕС) ; 3 ) КМ ┴ СЕ ; 4) ЕМ ┴ СК .

а) 1; 4; б) 2; 3; в) 3; г) 1.

**5.** ВО – перпендикуляр к плоскости α, ВА и ВС – наклонные, ОА и ОС – их проекции на плоскость α, причем сумма их длин равна 24 см. Найдите расстояние от точки В до плоскости α, если АВ= 4 √ 6 см. и ВС= 12 √2 см .

**6.** АВСD – квадрат с периметром, равным 16 √ 3 см. Точка Е удалена от всех сторон квадрата на 4 см. Найдите расстояние точки Е от плоскости АВС.

**7.** Через точки А и В проведены прямые, перпендикулярные плоскости α, пересекающие её в точках А1 и В1 соответственно. Найдите расстояние между точками А и В, если АА1 = 14м, ВВ1 = 8м, А1В1 = 22м и отрезок АВ не пересекает плоскость α.